

Dans cette séance on va voir

- (i) encore des exemples sur la matrice d'une application linéaire
- (ii) le thm du rang
- (iii) la notion de rang d'une app. lin. / matrice
- (iv) la notion d'espace de colonnes / lignes d'une matrice
- (v) la notion de matrice de passage

Exemple 4.57

Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$T(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$

$\dim 3$ (for $\mathbb{P}_2$) and $\dim 2$ (for $\mathbb{R}^2$)

dérivée de p (pointing to $p'(1)$)

Alors Test linéaire :

$$\begin{aligned} T(p + \lambda q) &= \begin{pmatrix} (p + \lambda q)(0) \\ (p + \lambda q)'(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p(0) + \lambda q(0) \\ (p' + \lambda q')(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) + \lambda q(0) \\ p'(1) + \lambda q'(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q(0) \\ q'(1) \end{pmatrix} = T(p) + \lambda T(q) \end{aligned}$$

On utilise les bases

- $\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$
- $\mathcal{B}'_{\text{can}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$

On veut calculer $[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}}$

Par définition

$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{bmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} & [T(t)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} & [T(t^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} \end{bmatrix}$$

On voit que

car on a la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(t)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(t^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose maintenant

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$



Calculer ∇
 $[T]_{B' \leftarrow B_{can}}$

Pour cela il faut calculer

$$[T(v^1)]_{B'} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{car} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[T(v^2)]_{B'} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[T(v^3)]_{B'} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{B' \leftarrow B_{can}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

§ 4.9 + 5.6. Le Théorème du rang

Thm 4.58 + 5.25 Soient V, V' deux espaces vectoriels de dim. finies, et $T: V \rightarrow V'$ une application linéaire. Alors

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Img}(T)) = \dim(V)$$

De façon équivalente, Pour une matrice A de taille $m \times n$,
 $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Img}(A)) = n$

$\uparrow$ déf. rang de A

(Preuve) Soit $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \text{Ker}(T)$ une base.

Si $p=n$, alors $\text{Img}(T) = \{0_{V'}\}$ et donc $\dim(\text{Img}(T)) = 0 \Rightarrow$ Thm OK ✓

On suppose désormais $p < n$. Dans ce cas, par le Thm. 4.53 (feuille 35), il existe $v_{p+1}, \dots, v_n \in V$ tels que $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ est base de V . On affirme que $B' = \{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)\}$ est une base de $\text{Im}(T)$. En effet,

• B' génératrice: Pour $w \in \text{Im}(T)$, il existe $v \in V$ s.g. $w = T(v)$.

Or, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p + \alpha_{p+1} v_{p+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

car $\{v_1, \dots, v_n\}$ est base de V . Alors

$$\begin{aligned} w = T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p + \alpha_{p+1} v_{p+1} + \dots + \alpha_n v_n) = \underbrace{\alpha_1 T(v_1)}_{=0_V} + \dots + \underbrace{\alpha_p T(v_p)}_{=0_V} + \alpha_{p+1} T(v_{p+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n) \\ &= \alpha_{p+1} T(v_{p+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n) \quad \checkmark \end{aligned}$$

• B' est libre: Soit $\beta_{p+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta_{p+1} T(v_{p+1}) + \dots + \beta_n T(v_n) = 0_V$$

ie. $T(\beta_{p+1} v_{p+1} + \dots + \beta_n v_n) = 0_V \Rightarrow \beta_{p+1} v_{p+1} + \dots + \beta_n v_n \in \text{Ker}(T)$

Alors, il existe $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta_{p+1} v_{p+1} + \dots + \beta_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p$$

car $\{v_1, \dots, v_p\}$ est base de $\text{Ker}(T)$. En conséquence

$$(-\beta_1) v_1 + \dots + (-\beta_p) v_p + \beta_{p+1} v_{p+1} + \dots + \beta_n v_n = 0_V \Rightarrow \begin{matrix} -\beta_1 = \dots = -\beta_p = 0 \\ \text{et} \\ \beta_{p+1} = \dots = \beta_n = 0 \end{matrix} \quad \checkmark$$

car $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ est libre.

On conclut que

$$\left. \begin{aligned} \dim(\text{Ker}(T)) &= p \text{ [hyp]} \\ \dim(\text{Im}(T)) &= n - p \\ \dim(V) &= n \text{ [hyp]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\dim(\text{Ker}(T)) \\ &+ \dim(\text{Im}(T)) \\ &= p + (n - p) = n \\ &= \dim(V) \quad \checkmark \end{aligned}$$

(Rappel) Pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$:

Notation

$$\text{Im}g(A) := \text{Im}g(T_A)$$

$$\text{Ker}(A) := \text{Ker}(T_A)$$

$$\text{où } T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\bar{v} \mapsto A \cdot \bar{v}$$

En plus, on écrit aussi:

$$\text{Col}(A) := \text{Vect}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\text{Lgn}(A) := \text{Vect}\{\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

colonnes de A
lignes de A

Fait

Par définition

$$\text{Col}(A) = \text{Im}g(A) \quad \nabla$$

(Rappel)

Base de $\text{Col}(A) = \text{Im}g(A)$

$$\textcircled{1} A \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{A} \leftarrow \text{FER de } A$$

$[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \quad [\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n]$

$\textcircled{2}$ les numéros des colonnes de $\tilde{A}$ avec des pivots: $\tilde{a}_{i_1}, \dots, \tilde{a}_{i_r}$

$$\{\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_r}\} \text{ base de } \text{Col}(A)$$

on les appelle
"colonne-pivot"

Fait

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(\tilde{A}) \text{ si } \tilde{A} \text{ est FER de } A?$$

(Lemme 11)
(et Cor. 4)
(Preuve)

Comme $\tilde{A}$ peut s'obtenir de A en faisant des OEL, on voit que $\text{Lgn}(\tilde{A}) \subseteq \text{Lgn}(A)$. De la même façon, A peut s'obtenir de $\tilde{A}$ en faisant des OEL, les réciproques de celles considérées avant.

En conséquence $L_{\text{gn}}(A) \subseteq L_{\text{gn}}(\tilde{A})$. Cela nous dit que $L_{\text{gn}}(A) = L_{\text{gn}}(\tilde{A})$. □

39

Thm. 531 | Pour une matrice A

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$$

(Preuve) Soit $\tilde{A}$ la FER de A . Le nombre de colonnes-pivot de $\tilde{A}$ est égal au nombre de lignes non nulles de $\tilde{A}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) &= \#\{\text{colonnes-pivot de } A\} = \#\{\text{colonnes-pivot de } \tilde{A}\} \\ &= \#\{\text{lignes non-nulles de } \tilde{A}\} = \dim(L_{\text{gn}}(\tilde{A})) = \dim(L_{\text{gn}}(A)) \\ &= \dim(\text{Col}(A^T)) = \text{rang}(A^T). \end{aligned} \quad \square$$

Chapitre 8 | La matrice de passage/changement de base.

Définition

(voir Thm. 8.2 et p. 114) Soient $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ et $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_p\}$ deux bases d'un espace vectoriel V . On définit la

matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ (parfois : matrice de changement de base)

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} := \underbrace{[\text{id}_V]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}}_{\substack{\uparrow \text{matrice de l'application} \\ \text{linéaire identité de } V \text{ en } V}} \quad \text{i.e. } P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} := \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [v_p]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

Propriété fondamentale
de la matrice de passage

Pour $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_p\}$ des bases d'un espace vectoriel V , on a

$$[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \quad \text{pour tout } v \in V.$$

et c'est la unique matrice qui satisfait à cette id.

(Preuve) C'est une conséquence de la propriété fondamentale de la matrice d'une application linéaire. $\square$

Propriétés

• $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} \cdot P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$ pour trois bases $\mathcal{B}, \mathcal{E}$ et $\mathcal{B}'$ d'un espace vect. de dim n

• $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ est inversible et $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$.

(Preuve). $[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}$ et $[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} [v]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} \Rightarrow P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} \cdot P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$

• On voit que $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = I_n$ et $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = I_n$, ce qui nous dit que

$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = I_n$ et $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = I_n$

$\Rightarrow P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ inversible et $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$. $\square$

Exemple 8.4 • $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{can} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$

• $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

une matrice canonique



Il y a une matrice de passage simple:

$P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Dans ce cas il y a une matrice de passage "facile" ! ∇

les vecteurs de $\mathcal{E}$ mis sous forme de colonne pour former la matrice

car $P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{E}} = \left[\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{can}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{can}} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Pour calculer l'autre matrice de passage

$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}_{can}} = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$